EPREUVE DE MATHEMATIQUES - OPTION P.C. / P.S.I.-

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

Problème

Le problème est composé de deux parties. Les résultats de la première partie seront considérés comme admis dans la seconde partie. On ne pourra pas faire usage des résultats de la seconde partie pour apporter des solutions aux questions de la première partie.

On fera usage des notations et résultats suivants. $\mathbb{R}$ désigne le corps des (nombres) réels, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des (nombres) entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ désigne l'ensemble des entiers (strictement) positifs. Pour chaque $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\min(s,t) = \begin{cases} s & \text{lorsque } s \leq t, \\ t & \text{lorsque } s > t. \end{cases}$$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on désigne par $C[a,b]$, ou $C_0[a,b]$, l'ensemble des fonctions réelles, définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$. $f \in C[a,b]$ est dite *dérivable sur* $[a,b]$, de *dérivée* $f' = \frac{d}{dt}f$ *sur* $[a,b]$, si, pour tout $t \in [a,b]$, la limite

$$\frac{d}{dt}f(t) = f'(t) = \lim_{\substack{s \to t \\ s \in [a,b]}} \frac{f(s) - f(t)}{s - t},$$

existe dans $\mathbb{R}$. Dans cette définition, s tend vers t, *tout en étant restreint à varier dans l'intervalle* $[a,b]$. On pose alors $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, et on désigne par $C_1[a,b]$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$, dont la dérivée appartient à $C[a,b]$.

On définit la *dérivée* $f^{(p)}$ *d'ordre* p *de* f *sur* $[a,b]$ par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$. Si $f^{(p-1)} \in C[a,b]$ a été définie, on pose, pour tout $t \in [a,b]$, lorsque cette expression a un sens,

$$\frac{d^p}{dt^p}f(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d}{dt}f^{(p-1)}(t).$$

$C_p[a,b]$ désigne l'ensemble des fonctions f ayant une *dérivée* $f^{(p)}$ *d'ordre* p *sur* $[a,b]$, *continue sur* $[a,b]$. La dérivée seconde de f sur $[a,b]$ est notée $f'' = f^{(2)} = \frac{d^2}{dt^2}f$. On a

$$C_p[a,b] \supseteq C_q[a,b] \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq q.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $h, h_1, h_2 \in C_p[a,b]$. Pour tout $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, on note $rh \in C_p[a,b]$ (respectivement $r_1h_1 + r_2h_2 \in C_p[a,b]$) la fonction qui, à tout $t \in [a,b]$, associe $rh(t)$ (respectivement $r_1h_1(t) + r_2h_2(t)$). $C_p[a,b]$, muni des opérations ci-dessus, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On note $\{\omega \in \mathcal{E} : \mathcal{P}\}$ l'ensemble des éléments ω d'un ensemble $\mathcal{E}$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble E, on note respectivement

$$\sup_{x \in E} f(x) \quad \text{et} \quad \inf_{x \in E} f(x),$$

la *borne supérieure* (éventuellement égale à $+\infty$) et la *borne inférieure* (éventuellement égale à $-\infty$) de la partie de $\mathbb{R}$ définie par $\{f(x) : x \in E\}$.

Première Partie

A toute fonction $f \in C_0[0,1]$, on associe la fonction $g = Tf$ définie sur $[0,1]$ par

$$(1) \qquad (Tf)(t) = g(t) = \int_0^1 \min(s,t) f(s) ds \quad \text{pour} \quad t \in [0,1].$$

Première Question

1.1.a. Montrer que, pour tout $f \in C_0[0,1]$, la valeur $g(t)$ de $g = Tf$ au point $t \in [0,1]$ s'exprime de manière simple en fonction de t et des intégrales

$$F_1(t) = \int_0^t sf(s)ds \quad \text{et} \quad F_2(t) = \int_t^1 f(s)ds. \tag{2}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ un entier naturel quelconque. Montrer que si $f \in C_p[0,1]$, alors $F_1 \in C_{p+1}[0,1]$ et $F_2 \in C_{p+1}[0,1]$.

1.1.b. En déduire que, lorsque $f \in C_p[0,1]$ pour un entier $p \in \mathbb{N}$, alors $g = Tf \in C_{p+1}[0,1]$. Montrer que $\frac{d}{dt}g(t) = g'(t)$ (avec $g = Tf$) s'exprime alors de façon simple en fonction de $F_2(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

1.1.c. Montrer que, pour tout $f \in C_0[0,1]$, $g = Tf \in C_2[0,1]$, et vérifier que la dérivée seconde $\frac{d^2}{dt^2}g = g''$ de $g = Tf$ sur $[0,1]$ s'exprime de façon simple en fonction de f. Montrer que les valeurs numériques de $g(0)$ et $g'(1)$ sont indépendantes de $f \in C_0[0,1]$.

Deuxième Question

A toute fonction $f \in C_0[0,1]$, on associe la fonction $F = \Theta f$, définie par

$$F(t) = \int_0^t \Big\{ \int_v^1 f(u)du \Big\} dv \quad \text{pour} \quad t \in [0,1].$$

1.2.a. Montrer que Θ est une application linéaire injective de l'espace vectoriel réel $C_0[0,1]$ dans l'espace vectoriel réel $C_2[0,1]$. Caractériser les fonctions $F \in C_2[0,1]$ appartenant à l'image $\Theta\big(C_0[0,1]\big) = \{\Theta f : f \in C_0[0,1]\}$ de $C_0[0,1]$ par Θ.

Montrer que l'application inverse de Θ, notée Θ^{-1}, qui à $F = \Theta f \in \Theta\big(C_0[0,1]\big)$ associe $\Theta^{-1}F = f \in C_0[0,1]$, s'exprime de façon simple en fonction de F.

1.2.b. A tout $f \in C_0[0,1]$ et $g \in C_0[0,1]$, on associe $F = \Theta f$ et $G = \Theta g$, et on définit

$$\langle f, g\rangle_\Theta = \int_0^1 F(t)G(t)dt = \int_0^1 (\Theta f)(t)(\Theta g)(t)dt.$$

Montrer que $\langle f, g\rangle_\Theta$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $C_0[0,1]$, faisant de ce dernier un espace préhilbertien réel. On pose

$$||g||_\Theta = \langle g, g\rangle_\Theta^{1/2} \quad \text{pour tout} \quad g \in C_0[0,1].$$

1.2.c. Soit $f \in C_0[0,1]$ une fonction fixée. On suppose que $g_1 \in C_0[0,1]$ est une fonction telle que $\langle g_1, g_1\rangle_\Theta = 1$. Montrer que l'application

$$x \in \mathbb{R} \quad \to \quad ||f - xg_1||_\Theta,$$

est bornée inférieurement et possède un minimum atteint en un point unique. Déterminer en fonction de $\langle f, g_1\rangle_\Theta$ l'expression de cette valeur $r_1 \in \mathbb{R}$, pour laquelle

$$||f - r_1g_1||_\Theta = \inf_{x\in\mathbb{R}} ||f - xg_1||_\Theta < ||f - rg_1||_\Theta \quad \forall r \neq r_1.$$

Que peut-on dire de $\langle f - r_1g_1, g_1\rangle_\Theta$?

1.2.d. On suppose que $\{g_n : n \geq 1\} \subseteq C_0[0,1]$ est une suite de fonctions vérifiant la propriété, pour $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle g_m, g_n\rangle_\Theta = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Soit $f \in C_0[0,1]$ une fonction fixée. Montrer l'existence d'une suite réelle $\{r_n : n \geq 1\}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$||f - \sum_{m=1}^{n} r_m g_m||_\Theta = \inf_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}} ||f - \sum_{m=1}^{n} x_m g_m||_\Theta.$$

Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_n^2$$

est convergente et donner une borne supérieure simple de sa somme en fonction de f.

Troisième Question

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \qquad \lambda y'' + y = 0.$$

1.3.a. En distinguant le cas où $\lambda > 0$ de celui où $\lambda < 0$, donner la forme générale des solutions $y \in C_2[0,1]$ de l'équation (E_λ), exprimées à partir de fonctions réelles simples.

1.3.b. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, pour lesquelles (E_λ) admet au moins une solution $y \in C_2[0,1]$, non identiquement nulle sur $[0,1]$, et vérifiant les conditions

$$(L) \qquad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(1) = 0.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est composé d'une suite $\{\lambda_n : n \geq 1\}$ de nombres réels strictement positifs qu'il est possible de mettre sous la forme $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \ldots > 0$. Donner l'expression exacte de λ_n en fonction de $n \geq 1$.

Quelle est la valeur de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_n \, ?$$

1.3.c. Pour tout $n \geq 1$, montrer qu'il existe une solution unique $y = e_n \in C_2[0,1]$ de l'équation différentielle (E_{λ_n}) vérifiant les conditions (L), l'identité

$$\int_0^1 e_n^2(t)dt = 1,$$

et telle que $\frac{d}{dt}e_n(0) > 0$. Déterminer explicitement $e_n(t)$ à partir de fonctions simples.

1.3.d. Pour tout couple d'entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 e_m(t)e_n(t)dt.$$

Deuxième Partie

Dans cette partie, on admettra sans chercher à la démontrer, la propriété $(P1)$ suivante.

Soit $\phi(t)$ une fonction à valeurs réelle de la variable $t \in [-1,1]$. On suppose qu'il existe un ensemble fini $\mathcal{D} = \{t_1, ..., t_m\} \subseteq]-1,1[$ tel que, d'une part, ϕ soit continue en tout point de $[-1,1] - \mathcal{D}$, et d'autre part, pour tout $t \in [-1,1]$, les limites

$$\phi_-(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \phi(t-\varepsilon) \quad \text{et} \quad \phi_+(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \phi(t+\varepsilon),$$

existent dans $\mathbb{R}$. On a alors l'équivalence

$$(P1) \qquad \int_{-1}^{1} \phi(t)\sin(k\pi t)dt = \int_{-1}^{1} \phi(t)\cos(k\pi t)dt = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\iff \phi_-(t) = \phi_+(t) = 0 \ \ \forall t \in [-1,1].$$

Première Question

2.1.a. Soit $\psi \in C_0[0,1]$ une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer, en appliquant $(P1)$ à une fonction ϕ convenablement construite à partir de ψ, que la propriété suivante est satisfaite.

$$(P2) \quad \int_0^1 \psi(t)\{\sin(k\pi t) + \sin((k-1)\pi t)\}dt = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}^* \iff \psi(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,1].$$

2.1.b. Soit $f \in C_0[0,1]$ une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{F} \in C_2[0,1]$ telle que $\mathcal{F}'' = f$, avec $\mathcal{F}(0) = 0$ et $\mathcal{F}'(1) = 0$. Etablir l'équivalence

$$(P3) \qquad \int_0^1 f(t)\sin((k-\frac{1}{2})\pi t)dt = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}^*$$
$$\iff \int_0^1 \mathcal{F}(t)\sin((k-\frac{1}{2})\pi t)dt = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

2.1.c. Soit $\mathcal{F} \in C_1[0,1]$ une fonction continûment dérivable sur $[0,1]$, telle que $\mathcal{F}(1) = 0$. Montrer qu'il est possible de définir une fonction $\psi \in C_0[0,1]$ par

$$\psi(t) = \mathcal{F}(t)/\cos(\frac{1}{2}\pi t) \quad \text{pour} \quad 0 \le t < 1, \quad \text{et} \quad \psi(1) = \lim_{t \uparrow 1} \mathcal{F}(t)/\cos(\frac{1}{2}\pi t).$$

En déduire l'équivalence

$$(P4) \qquad \int_0^1 \mathcal{F}(t)\sin((k-\frac{1}{2})\pi t)dt = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}^* \iff \mathcal{F}(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,1].$$

2.1.d. Soit $f \in C_0[0,1]$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 \Big\{ \int_v^1 f(u)du \Big\} dv = 0.$$

Etablir l'équivalence

$$(P5) \qquad \int_0^1 f(t)\sin((k-\frac{1}{2})\pi t)dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \iff f(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1].$$

Deuxième Question

On considère la suite de fonctions $\{E_n : n \geq 1\}$, obtenues en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$E_n(t) = \sin((n - \frac{1}{2})\pi t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1].$$

2.2.a. Evaluer, pour tout couple d'entiers positifs $m, n \in \mathbb{N}^*$, la valeur numérique de

$$\gamma_{m,n} = \int_0^1 E_m(t)E_n(t)dt.$$

Montrer que $\gamma_{n,n}$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par

$$\gamma = \int_0^1 E_n^2(t)dt > 0 \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{3}$$

la valeur commune des $\gamma_{n,n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2.b. Soit $\mathcal{F} \in C_2[0, 1]$ une fonction deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, telle que $\mathcal{F}(0) = 0$ et $\mathcal{F}'(1) = 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \gamma^{-1} \int_0^1 \mathcal{F}(t)E_n(t)dt, \tag{4}$$

où γ est défini par (3). Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

est convergente. En déduire qu'il est possible de définir une fonction $\hat{\mathcal{F}} \in C_0[0, 1]$, par

$$\hat{\mathcal{F}}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n E_n(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1], \tag{5}$$

et justifier l'inégalité, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\hat{\mathcal{F}}(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n E_n(t)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|.$$

2.2.c. Soit $\mathcal{F} \in C_2[0, 1]$ une fonction deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, telle que $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(1) = 0$ et $\mathcal{F}'(1) = 0$. Soit $\hat{\mathcal{F}}$ définie comme en (5), compte tenu de (3) et (4). Montrer que

$$\int_0^1 \mathcal{F}(t)E_n(t)dt = \int_0^1 \hat{\mathcal{F}}(t)E_n(t)dt \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

En faisant usage des résultats de la question précédente, établir l'identité

$$\mathcal{F}(t) = \hat{\mathcal{F}}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n E_n(t) \quad \text{pour} \quad t \in [0, 1], \tag{6}$$

2.2.d. On rappelle la définition (1) de l'application $f \to Tf$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante Λ_n, dont on donnera la valeur numérique, telle que

$$(TE_n)(t) = \int_0^1 \min(s,t)E_n(s)ds = \Lambda_n E_n(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Soit $\mathcal{F} \in C_2[0,1]$ une fonction telle que $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(1) = 0$ et $\mathcal{F}'(1) = 0$. Déduire des relations (3)-(4)-(5)-(6) que, pour tout $t \in [0,1]$,

$$(T\mathcal{F})(t) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \Lambda_n a_n E_n(t).$$

Troisième Question

On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et $s,t \in [0,1]$,

$$K_N(s,t) = \sum_{n=1}^{N} \left\{(n - \frac{1}{2})\pi\right\}^{-2} E_n(s)E_n(t).$$

2.3.a. Montrer que, pour tout $s,t \in [0,1]$, la série

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{(n - \frac{1}{2})\pi\right\}^{-2} E_n(s)E_n(t) \tag{7}$$

est convergente, et justifier l'inégalité, pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{\substack{s\in[0,1]\\ t\in[0,1]}} \left|K(s,t) - K_N(s,t)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left\{(n - \frac{1}{2})\pi\right\}^{-2}. \tag{8}$$

Dans la suite du problème, on admettra que la fonction $K(s,t)$ définie par (7) est une fonction continue de $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$.

2.3.b. Soit $f \in C_0[0,1]$ une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir l'existence des fonctions $\mathcal{K}f$ et $\mathcal{K}_N f$ définies sur $[0,1]$ par

$$(\mathcal{K}f)(t) = \int_0^1 K(s,t)f(s)ds \quad \text{et} \quad (\mathcal{K}_N f)(t) = \int_0^1 K_N(s,t)f(s)ds.$$

Montrer que

$$\lim_{N \to +\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,1]} |(\mathcal{K}f)(t) - (\mathcal{K}_N f)(t)| \right\} = 0.$$

Vérifier que $\mathcal{K}_N f \in C_0[0,1]$, et en déduire que $\mathcal{K}f \in C_0[0,1]$.

2.3.c. Soit $\mathcal{F} \in C_2[0,1]$ une fonction deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$, telle que $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}(1) = 0$ et $\mathcal{F}'(1) = 0$. Dans cette question, on admettra que $\mathcal{F}$ vérifie les relations (4) et (6), compte tenu des définitions (3) et (4) de γ et $\{a_n : n \geq 1\}$.

Evaluer l'expression de $\mathcal{K}\mathcal{F}$ en fonction de $\{a_n : n \geq 1\}$ et de $\{E_n : n \geq 1\}$.

Comparer $T\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}\mathcal{F}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail